Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

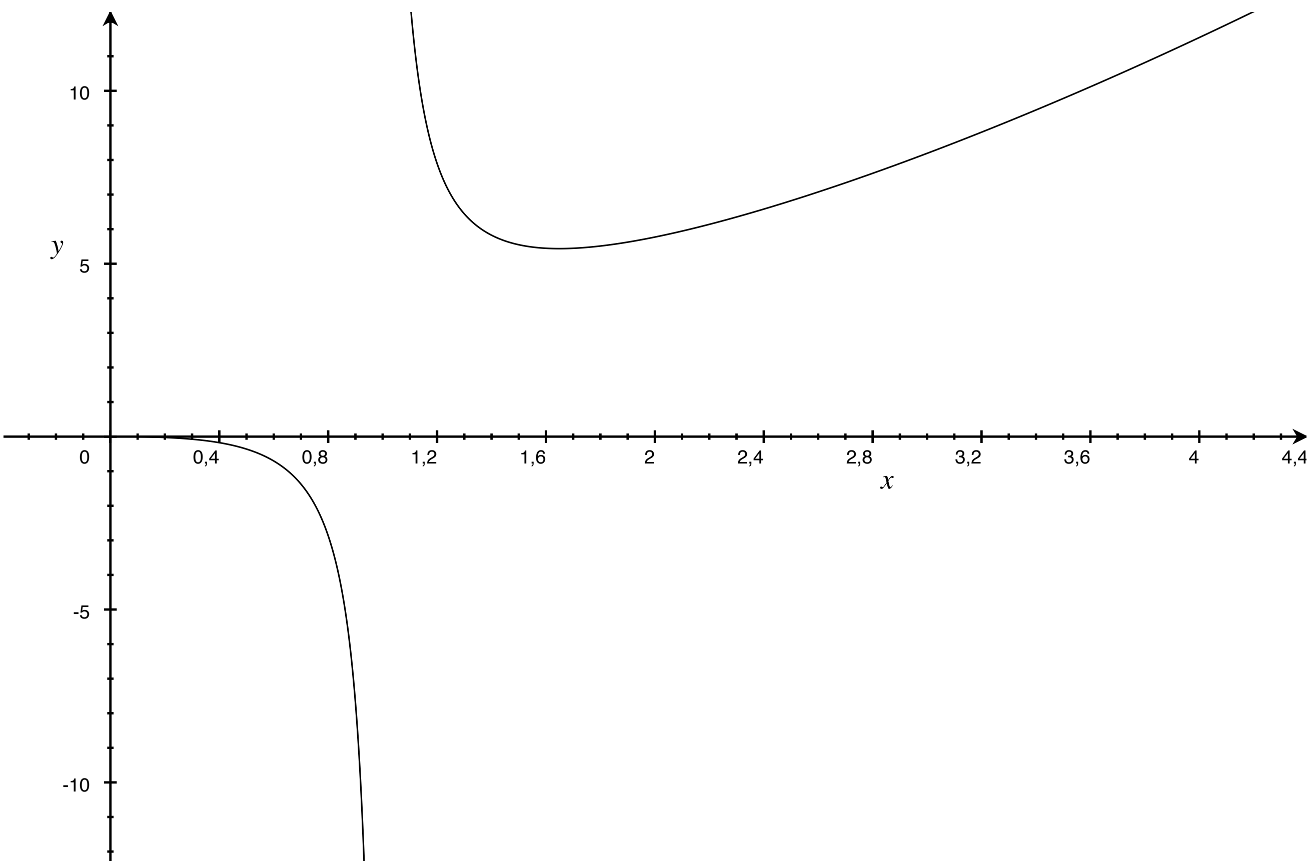
Pisa, 10 luglio 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x}$$

determinandone insieme di definizione, continutà, derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali e assoluti, monotonia, estremi superiore e inferiore, convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione



Esercizio 2 Dire se esiste finito e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}.$$

Soluzione

La funzione integranda è continua e positiva sull'intervallo $(0,1)$ ma non è limitata intorno al punto $x = 0$. Osserviamo che, per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

quindi per il criterio di confronto asintotico la funzione ha integrale generalizzato finito. Calcoliamone il valore effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{2t}{t(1+t)^3}\,dt = \left[-\frac{1}{(1+t)^2}\right]_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2}$$

quindi

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x^4 \sin^2(y) + y^4 \sin^2(x)}{x^2+y^2}.$$

Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Dire se esistono massimo e minimo di f e calcolarli, o, in alternativa determinare estremi superiore e inferiore.

Soluzione